Занятие 1. От противного

Теория

Правило исключенного третьего - верно $A \vee \neg A$.

Допустим, что верно $\neg A$. Если в таком случае удалось вывести противоречие, значит, что $\neg A$ ложно, а значит, A истинно.

Задания

1. По кругу лежат 7 монет. Докажите, что либо найдутся две соседние монеты, лежащие орлом вверх, либо две монеты, лежащие решкой вверх.

2. Имеется 82 пуговица, каждая пуговица — одного из 9 цветов. Докажите, что либо среди этих пуговиц найдутся 9 пуговиц одного цвета, либо 9 пуговиц разных цветов.

3. Шестеро грибников собрали 14 грибов. Докажите, что найдутся хотя бы два грибника, набравшие одинаковое количество грибов.

4. Остров имеет форму квадрата размером 4×4км. На это острове есть 15 горячих источников. Докажите, что на острове есть квадратный участок площадью 1км^2, на котором нет ни одного горячего источника.

5. Можно ли натуральные числа $1, 2, \ldots, 20, 21$ разбить на группы из трёх чисел, в каждой из которых наибольшее число равно сумме двух остальных?

6. 30 футбольных команд проводят первенство по круговой системе в один круг (это значит, что каждая команда должна сыграть с каждой по одному разу). Докажите, что в любой момент времени найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

Домашнее задание

1. В очереди за чипсами и газировкой стоят 50 школьников. Докажите, что либо среди них найдутся 8 школьников из одной школы, либо среди них найдутся 8 школьников все из разных школ.

2. Из набора домино выбросили все кости с "пустышками". Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд?

3. Можно ли расставить на шахматной доске 17 королей так, чтобы они не били друг друга?

4. Можно ли разложить 44 шарика на 9 кучек так, чтобы количество шариков в разных кучках было различным?

5. 10 школьников играли после Малого Мехмата в снежки. Каждый попал снежком в пятерых товарищей. Докажите, что хотя бы два школьника попали друг в друга.

Разбор

Задача 1

По кругу лежат 7 монет. Докажите, что либо найдутся две соседние монеты, лежащие орлом вверх, либо две монеты, лежащие решкой вверх.

Решение. Пусть никакие две соседние монеты не лежат одинаковой стороной вверх. Тогда монеты чередуются через одну - орел, решка, орел, решка. Допустим, что четные монеты повернуты орлом, а нечетные решкой. Тогда монеты №1 и №7 повернуты решкой - **противоречие**. Значит, существуют две монеты лежащие одинаковой стороной вверх.

Задача 2

Имеется 82 пуговица, каждая пуговица — одного из 9 цветов. Докажите, что либо среди этих пуговиц найдутся 9 пуговиц одного цвета, либо 9 пуговиц разных цветов.

Решение. Допустим, что не найдется ни 9 пуговиц одного цвет, ни 9 пуговиц различных цветов. Тогда каждого цвета пуговиц не более 8 штук и различных цветов пуговиц тоже не более 8. Следовательно, суммарно не более 81 пуговицы. **Противоречие**.

Задача 3

Шестеро грибников собрали 14 грибов. Докажите, что найдутся хотя бы два грибника, набравшие одинаковое количество грибов.

Решение. Допустим, что все грибники собрали разное количество грибов. Тогда как минимум, они должны были собрать следующее количество грибов: $0 + 1 + 2 + \dots + 5 = 15$. **Противоречие**.

Задача 4

Остров имеет форму квадрата размером 4×4км. На это острове есть 15 горячих источников. Докажите, что на острове есть квадратный участок площадью 1км^2, на котором нет ни одного горячего источника.

Решение. Разобъем мысленно остров на сетку с шагом в 1км. Допустим, что среди получившихся квадратных областей не найдется ни одной, на которой не было бы горячего источника. В таком случае горячих источников было бы хотя бы $4 \cdot 4 = 16$ штук. **Противоречие**.

Задача 5

Можно ли натуральные числа $1, 2, \ldots, 20, 21$ разбить на группы из трёх чисел, в каждой из которых наибольшее число равно сумме двух остальных?

Решение. Допустим, что такое разбиение существует. Тогда сумма чисел в каждой такой группе будет четной. Значит, сумма всех чисел также будет четной. Заметим, что по условию $1+2+3+\cdots+20+21 = 231$ - нечетное число. **Противоречие**.

Задача 6

30 футбольных команд проводят первенство по круговой системе в один круг (это значит, что каждая команда должна сыграть с каждой по одному разу). Докажите, что в любой момент времени найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

Решение. Допустим, что найдется момент времени, в который все команды сыграли различное число матчей. При этом каждая команда может сыграть не более 29 игр (по 1 разу с каждым соперником). Значит, команды должны сыграть $0, 1, 2 \ldots 29$ игр соответственно, чего быть не может, так как последняя команда должны сыграть со всеми, а первая - ни с кем. **Противоречие**.

Разбор домашнего задания

Задача 1

В очереди за чипсами и газировкой стоят 50 школьников. Докажите, что либо среди них найдутся 8 школьников из одной школы, либо среди них найдутся 8 школьников все из разных школ.

Решение. Допустим, что действительно не найдутся 8 школьников из одной школы и не найдутся 8 школьников из разных школ. В таком случае, различных школ не более 7 и из каждой не более 7 учеников. Значит, суммарно не более 49 учеников. **Противоречие.**

Задача 2

Из набора домино выбросили все кости с "пустышками". Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд?

Решение. Допустим, подобная расстановка существует. В получившейся последовательности Будут две крайнике клетки, в которых либо 2 различных цифры, либо 2 одинаковых. Рассмотрим любую цифру, которая отсутствует в крайних двух клетках. Суммарно клеток с этой цифрой ровно 7 штук. При этом, так как эта цифра встречается только во внутренних клетках, количество клеток с ней должно быть четным. **Противоречие.**

Задача 3

Можно ли расставить на шахматной доске 17 королей так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Разобъем доску на 16 квадратов 2×2. В каждом из них не более одного короля. Значит, суммарно может быть не более 16 королей.

Задача 4

Можно ли разложить 44 шарика на 9 кучек так, чтобы количество шариков в разных кучках было различным?

Решение. Допустим, что такое разложение существует. В таком случае минимальное количество шаров в кучках: $1, 2, 3 \ldots, 9$. Суммарно это $\frac{9(9+1)}{2} = 45 > 44$. **Противоречие.**

Задача 5

10 школьников играли после Малого Мехмата в снежки. Каждый попал снежком в пятерых товарищей. Докажите, что хотя бы два школьника попали друг в друга.

Решение. Допустим, что, действительно, не найдутся два школьника, попавших друг в друга. Рассмотрим любого школьника. Он попал в 5ых своих товарищей. При этом, в него могли попасть не более 4 человек, иначе бы суммарное число школьников превысило 10. Посчитаем суммарное количество исходящих снежков и входящих. Исходящих снежков должно быть ровно $10 \cdot 5 = 50$ - по пять кинутых каждым снежка. Входящих снежков суммарно не более $10 \cdot 4 = 40$. Суммарное количество кинутых снежков и принятых должны быть равны. **Противоречние.**