№ 12 | декабрь 2018

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ

КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 12

декабрь 2018

ЗАЯЧЬЕ ЗАНЯТИЕ

ДОМ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ

КВАКАЮЩИЕ СЛОВА

Enter

Кроме журнала редакция «Квантика» выпускает альманахи, календари загадок, наборы плакатов и книги серии «Библиотечка журнала «Квантик» (скоро выйдет второй выпуск – книга С. Н. Федина «Перепутаница»).

Электронную версию журнала «Квантик» вы можете приобрести на сайте **litres.ru**
О том, как оформить подписку на журнал, читайте по ссылке **kvantik.com/podpiska**

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

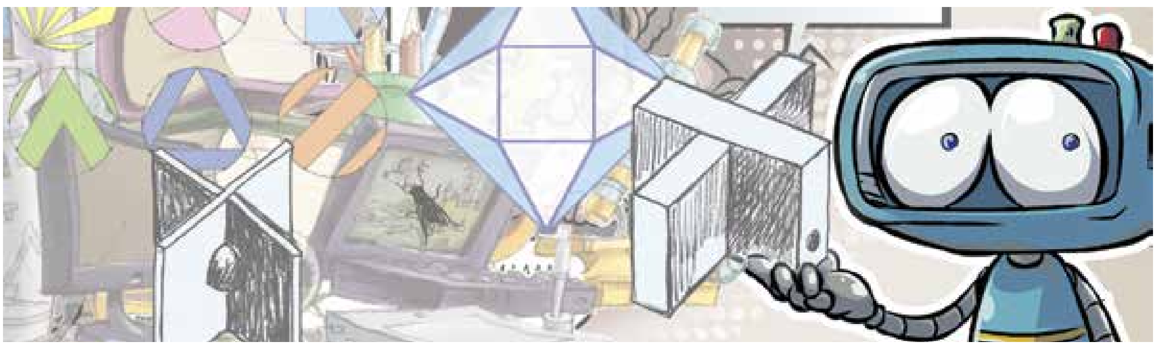
Журнал «Квантик» № 12, декабрь 2018 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, И. А. Маховая, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Анна Горлач

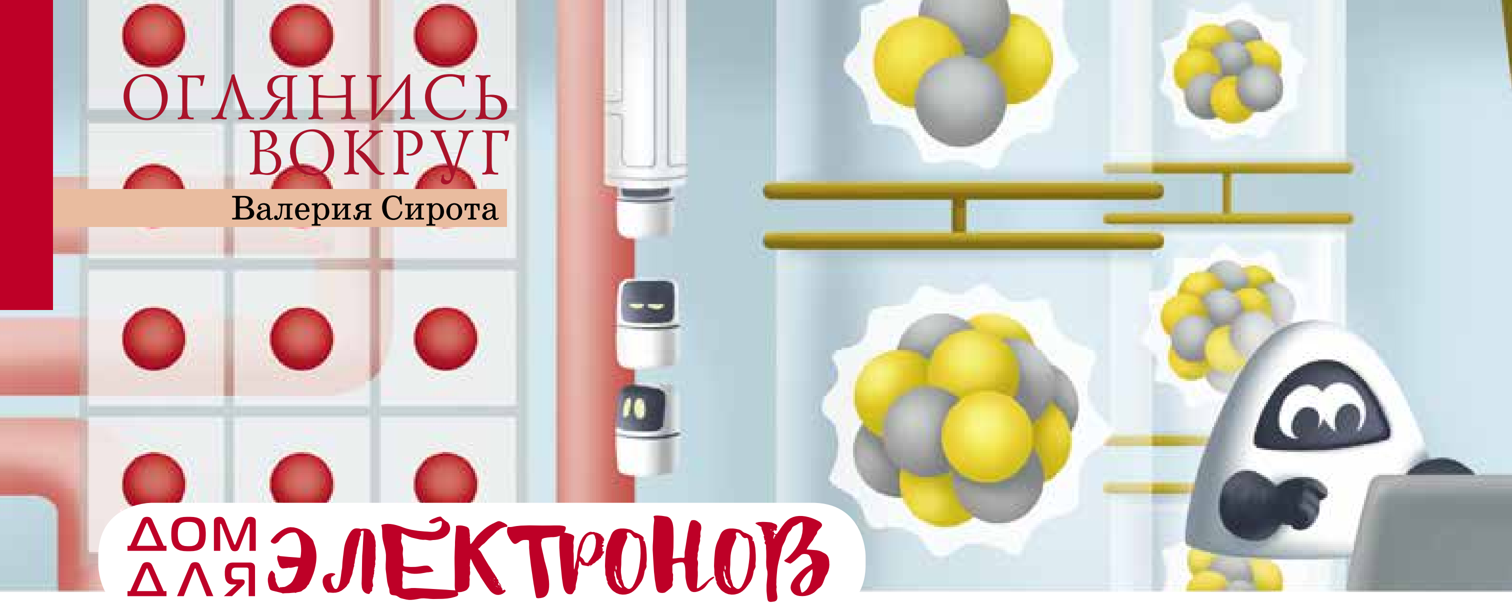
Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ «Каталог Российской прессы» МАП (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка по «Каталогу Российской прессы» на сайте **vipishi.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 5000 экз.
Подписано в печать: 15.11. 2018
Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-Столица-8»
Тел.: (495) 363-48-84
http://capitalpress.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ





Валерия Сирота

ДОМ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ

Так что же это за «ручки», которыми атом держится за другие атомы в молекуле? Коротко говоря – это некоторые из его электронов, а силы, удерживающие молекулу, – электрические. Чтобы разобраться подробнее, нужно понять, как живут электроны в атоме.

Знаете, как устроено осиное гнездо? Оно состоит из тонких сферических слоёв, вложенных один в другой, с большими воздушными промежутками между слоями. Вот примерно так же можно представлять себе атом. (Заметьте – «можно представлять» не значит, что он так выглядит! Слои у атома на самом деле не сферические, и они невидимы.) Слои – они называются *уровнями энергии* – это как бы этажи большого дома – атома. На каждом этаже – комнаты для электронов.

Все комнаты двухместные, но на разных этажах число комнат разное. Более того, не все комнаты на одном этаже одинаковы. Как в гостиницах бывает, что, например, номера с окнами, выходящими на море, считаются лучше тех, что с видом на город, – так и в атоме на одном и том же этаже есть разные «коридоры»: в одних комнаты «лучше», в других «хуже». А вот в каждом коридоре комнаты уже одинаковы. Коридоры обозначаются латинскими буквами: s – коротенькие коридорчики всего с одной, зато самой лучшей, комнатой; p – коридоры чуть похуже, по три комнаты в каждом; d – ещё похуже, в каждом по пять комнат, дальше f-коридор...

Замечательно, что у всех атомов – от водорода до унбинилия – этот дом устроен совершенно одинаково, вся разница в высоте этажей и количестве жильцов. Первый этаж совсем маленький: там только s-коридор с единственной комнатой (он называется 1s). Как в осином гнезде, каждый следующий уровень «выше» и больше предыдущего; поэтому на втором этаже уже два коридора, 2s и 2p, так что туда могут, в принципе, поместиться восемь жильцов. На третьем этаже – три коридора: 3s, 3p и 3d и т.д.

Теперь давайте заселять в наш дом жильцов, то есть электроны. Они вообще-то любят жить как можно ниже, при этом, естественно, если есть

выбор, предпочитают лучшие комнаты. Поехали!

В атоме водорода единственный электрон, конечно, «селится» на первый уровень, в комнату 1s. В атоме гелия электрона два, и оба они поселяются в одной и той же комнате. То, что в коридоре 1s у гелия два жильца, обозначается так: $1s^2$. В атоме лития три электрона, и одному приходится поселиться на втором этаже: $1s^2 2s^1$. А в атоме бора уже и коридор 2s весь занят, приходится селиться в p-коридор второго этажа: $1s^2 2s^2 2p^1$.

Во многих вариантах таблицы Менделеева (как и в том, что мы здесь приводим)[2] есть «подсказки», в каких коридорах (по-научному – на каких подуровнях) сколько электронов живёт. Правда, места в клетках мало, и обычно указываются только внешние уровни – последний и иногда предпоследний этажи. И вот глядите, в первых трёх горизонтальных рядах таблицы, вплоть до аргона, «новые» электроны чинно-благородно «селятся» по порядку: сначала s-подуровень, потом p, потом переходим на следующий этаж…

А вот с калием и кальцием случается странное. Вместо того чтобы выбрать себе место в d-коридоре третьего этажа, электроны 19-го и 20-го элементов отправляются на четвёртый этаж! Видно, в d-коридоре комнаты настолько непривлекательны для электронов, что они предпочитают подняться на этаж повыше, но уж поселиться в s-комнате. Зато элементы с 21-го по 30-й «поселяют» свои новые электроны на 3d-подуровень, и третий этаж, наконец, заполняется полностью. (Заметьте, в таблице в этих клетках указано, что заселяется коридор d, а какого этажа – не написано, надо самим догадаться.)

Теперь мы знаем, почему клетки таблицы Менделеева раскрашены в разные цвета! Это тоже подсказка – в красных клетках последние электроны заполняют s-подуровень, в жёлтых – p-, а в синих – d-подуровень. Номер строки при этом совпадает с номером последнего занятого (хотя бы одним электроном) этажа.

[2] Читатель, возможно, заметил, что таблица Менделеева, приведённая в этом номере, отличается от той, которая была в №11. Там она для компактности была укорочена, длинные строки были разбиты на две части.

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Задача 1. Нарисуйте «схему электронного дома» по этажам – примерно как на рисунке, только покрупнее.

5	**s**	**p**	**d**	**f**
4	**s**	**p**	**d**	**f**
3	**s**	**p**	**d**	
2	**s**	**p**		
1	**s**			

Коридоры, более дальние, чем f, можно не рисовать – там такие плохие комнаты, что никто в них не селится, предпочитая верхние этажи. Покажите стрелками, в каком порядке идёт заселение коридоров электронами. Можно ещё провести линии, отделяющие коридоры, которые заполняются

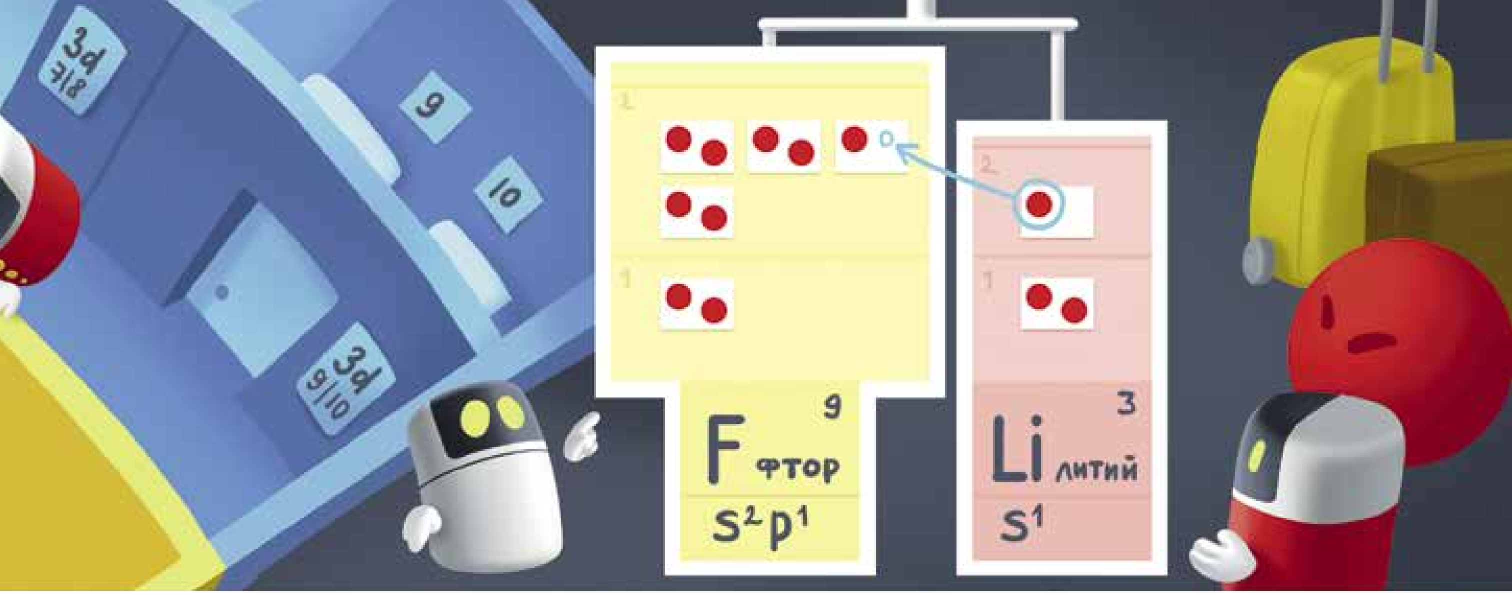
1 **H** водород s^1 1.00794																	2 **He** гелий s^2 4.0026
3 **Li** литий s^1 6.941	4 **Be** бериллий s^2 9,0121											5 **B** бор 10.811 s^2p^1	6 **C** углерод 12.0107 s^2p^2	7 **N** азот 14.0067 s^2p^3	8 **O** кислород 15.9994 s^2p^4	9 **F** фтор 18.9984 s^2p^5	10 **Ne** неон 20.1797 s^2p^6
11 **Na** натрий s^1 22.9897	12 **Mg** магний s^2 24.3050											13 **Al** алюминий 26.9815 s^2p^1	14 **Si** кремний 28.0855 s^2p^2	15 **P** фосфор 30.9737 s^2p^3	16 **S** сера 32.065 s^2p^4	17 **Cl** хлор 35.453 s^2p^5	18 **Ar** аргон 39.948 s^2p^6
19 **K** калий s^1 39.0983	20 **Ca** кальций s^2 40.078	21 **Sc** скандий 44.9559 s^2d^1	22 **Ti** титан 47.867 s^2d^2	23 **V** ванадий 50.9415 s^2d^3	24 **Cr** хром 51.9961 s^1d^5	25 **Mn** марганец 54.938 s^2d^5	26 **Fe** железо 55.845 s^2d^6	27 **Co** кобальт 58.933 s^2d^7	28 **Ni** никель 58.6934 s^2d^8	29 **Cu** медь 63.546 s^1d^{10}	30 **Zn** цинк 65.38 s^2d^{10}	31 **Ga** галлий 69.723 s^2p^1	32 **Ge** германий 72.63 s^2p^2	33 **As** мышьяк 74.9216 s^2p^3	34 **Se** селен 78.96 s^2p^4	35 **Br** бром 79.904 s^2p^5	36 **Kr** криптон 83.798 s^2p^6
37 **Rb** рубидий s^1 85.468	38 **Sr** стронций s^2 87.62	39 **Y** иттрий 88.906 s^2d^1	40 **Zr** цирконий 91.224 s^2d^2	41 **Nb** ниобий 92.906 s^1d^4	42 **Mo** молибден 95.96 s^1d^5	43 **Tc** технеций 97.907 s^2d^5	44 **Ru** рутений 101.07 s^1d^7	45 **Rh** родий 102.91 s^1d^8	46 **Pd** палладий 106.42 d^{10}	47 **Ag** серебро 107.87 s^1d^{10}	48 **Cd** кадмий 112.41 s^2d^{10}	49 **In** индий 114.82 s^2p^1	50 **Sn** олово 118.71 s^2p^2	51 **Sb** сурьма 121.76 s^2p^3	52 **Te** теллур 127.60 s^2p^4	53 **I** иод 126.90 s^2p^5	54 **Xe** ксенон 131,29 s^2p^6
55 **Cs** цезий s^1 132,91	56 **Ba** барий s^2 137.33		72 **Hf** гафний 178.49 s^2d^2	73 **Ta** тантал 180.94 s^2d^3	74 **W** вольфрам 183.85 s^2d^4	75 **Re** рений 186.2 s^2d^5	76 **Os** осмий 190.2 s^2d^6	77 **Ir** иридий 192.2 s^2d^7	78 **Pt** платина 195.09 s^1d^9	79 **Au** золото 196.96 s^1d^{10}	80 **Hg** ртуть 200.59 s^2d^{10}	81 **Tl** таллий 204.37 s^2p^1	82 **Pb** свинец 207.19 s^2p^2	83 **Bi** висмут 208.98 s^2p^3	84 **Po** полоний 208.98 s^2p^4	85 **At** астат 209.98 s^2p^5	86 **Rn** радон 222.01 s^2p^6
87 **Fr** франций s^1 223.02	88 **Ra** радий s^2 226.02		104 **Rf** резерфордий 261 $s^2d^2f^{14}$	105 **Db** дубний 268 $s^2d^3f^{14}$	106 **Sg** сиборгий 271 $s^2d^4f^{14}$	107 **Bh** борий 267 $s^2d^5f^{14}$	108 **Hs** хассий 269 $s^2d^6f^{14}$	109 **Mt** мейтнерий 276 $s^2d^7f^{14}$	110 **Ds** Дармштадтий 281 $s^1d^9f^{14}$	111 **Rg** Рентгений 280 $s^1d^{10}f^{14}$	112 **Cn** Коперниций 285 $s^2d^{10}f^{14}$	113 **Nh** Нихоний 284 $s^2p^1d^{10}f^{14}$	114 **Fl** Флеровий 289 $s^2p^2d^{10}f^{14}$	115 **Mc** Московий 288 $s^2p^3d^{10}f^{14}$	116 **Lv** Ливерморий 293 $s^2p^4d^{10}f^{14}$	117 **Ts** Теннессин 294 $s^2p^5d^{10}f^{14}$	118 **Og** Оганесон 294 $s^2p^6d^{10}f^{14}$
119 **Uue** Унуненний s^1 316	120 **Ubn** Унбинилий s^2 320																

ЛАНТАНОИДЫ

57 **La** лантан 138.91 s^2d^1	58 **Ce** церий 140.12 $s^2d^1f^1$	59 **Pr** празеодим 140.90 s^2f^3	60 **Nd** неодим 144.24 s^2f^4	61 **Pm** прометий 145 s^2f^5	62 **Sm** самарий 150.35 s^2f^6	63 **Eu** европий 151.96 s^2f^7	64 **Gd** гадолиний 157.25 $s^2d^1f^7$	65 **Tb** тербий 158.92 s^2f^9	66 **Dy** диспрозий 162.50 s^2f^{10}	67 **Ho** гольмий 164.93 s^2f^{11}	68 **Er** эрбий 167.26 s^2f^{12}	69 **Tm** тулий 168.93 s^2f^{13}	70 **Yb** иттербий 173.04 s^2f^{14}	71 **Lu** лютеций 174.97 $s^2d^1f^{14}$

АКТИНОИДЫ

89 **Ac** актиний 227.02 s^2d^1	90 **Th** торий 232.03 s^2d^2	91 **Pa** протактиний 231.03 $s^2d^1f^2$	92 **U** уран 238.02 $s^2d^1f^3$	93 **Np** нептуний 237.04 $s^2d^1f^4$	94 **Pu** плутоний 244.06 s^2f^6	95 **Am** америций 243.06 s^2f^7	96 **Cm** кюрий 247.07 $s^2d^1f^7$	97 **Bk** берклий 247.07 s^2f^9	98 **Cf** калифорний 251.07 s^2f^{10}	99 **Es** эйнштейний 252.08 s^2f^{11}	100 **Fm** фермий 257.08 s^2f^{12}	101 **Md** менделевий 258.09 s^2f^{13}	102 **No** нобелий 259.10 s^2f^{14}	103 **Lr** лоуренсий 260.10 $s^2d^1f^{14}$



во второй строке таблицы Менделеева, в третьей строке и т.д.

Задача 2. Запишите, в каких коридорах на каждом этаже сколько живёт электронов в атоме хрома Cr. Проверьте: всего их должно быть 24.

Задача 3. Теперь вы, наверно, догадаетесь, что значат загадочные строки «лантаноиды» и «актиноиды» внизу таблицы. Почему они не поместились в саму таблицу?

Задача 4. Рассмотрите таблицу: какие ещё «сбои» происходят при заселении этажей выше второго?

Как же всё это связано с тем, как соединяются атомы в молекуле? А вот как: атомы стремятся, чтобы все их уровни-этажи были полностью заполнены. Или хотя бы подуровни-коридоры. Ради этой цели они готовы на многое: могут, например, отдать свой собственный электрон или взять себе чужой. Например, встречается атом лития с атомом фтора. Фтору страсть как хочется заполнить свой второй этаж, ведь ему не хватает всего одного электрончика. А у лития как раз этот электрончик один на своём этаже, можно сказать, лишний… Вот литий и готов отдать его фтору. Это и есть связь: ведь теперь литий, отдавший свой электрон, стал заряжен положительно, а фтор, присвоивший чужое, – отрицательно, и вот они теперь притягиваются друг к другу. Такая связь называется *ионной* (ион – помните? – это «неправильный» атом, который лишился одного или нескольких электронов или, наоборот, захватил себе один или несколько лишних).

Но часто бывает удобнее не отдавать электроны, а делиться ими. Вот так это происходит. Встретились, скажем, два атома водорода. Обоим не хватает по одному электрону, но как решить, кто кому отдаёт? Атомы-то одинаковые! И вот они обобществляют свои электроны, то есть сближаются так, что каждый из этих двух электронов может считаться принадлежащим им обоим. Электроны немножко меняют своё движение и начинают «вращаться вокруг обоих ядер сразу». Опять

образовалась связь – благодаря тому, что каждый отдал свой электрон «в общее пользование». Такая связь называется *ковалентной*.

А если встретятся два атома кислорода? Им не хватает по два электрона на внешнем уровне, и они обобществят каждый по два электрона – получится две «ручки»-связи. Так могут делать и неодинаковые атомы. Например, в молекуле соляной кислоты HCl водороду невыгодно отдать электрон и остаться совсем без ничего, поэтому они с хлором «делят» пару электронов, «объявляя» их общими. Остальные, внутренние свои электроны, хлор держит при себе.

И так всегда – поскольку все нижние слои заполнены и о них волноваться не приходится, химические свойства атомов определяются электронами на внешних, незаполненных уровнях. Поэтому атомы из одного вертикального столбца (то есть с одинаковым набором электронов на внешнем уровне) похожим образом ведут себя в химических реакциях, и число «ручек» у них обычно одинаковое.

Теперь вы уже и сами можете разобраться, почему у натрия и у хлора валентность 1, у кислорода – 2, а у углерода – 4. Или почему атомы инертных газов из восьмой колонки ни с кем не хотят «иметь дела».

Конечно, отнюдь не всё так просто объяснить или вывести, особенно когда в дело включаются d-электроны. У больших и тяжёлых атомов внешние этажи уже так далеко от ядра, что не всегда понятно, что такому атому удобнее – взять на этот уровень ещё пару электронов или отдать все те, что там уже есть... Иногда, чтобы предсказать, какими электронами и как именно атомы «согласятся поделиться» друг с другом, люди пишут специальные программы и долго считают на мощных компьютерах. А иногда и это не помогает, приходится все гипотезы проверять на опыте. Но всё-таки главные закономерности мы поняли.

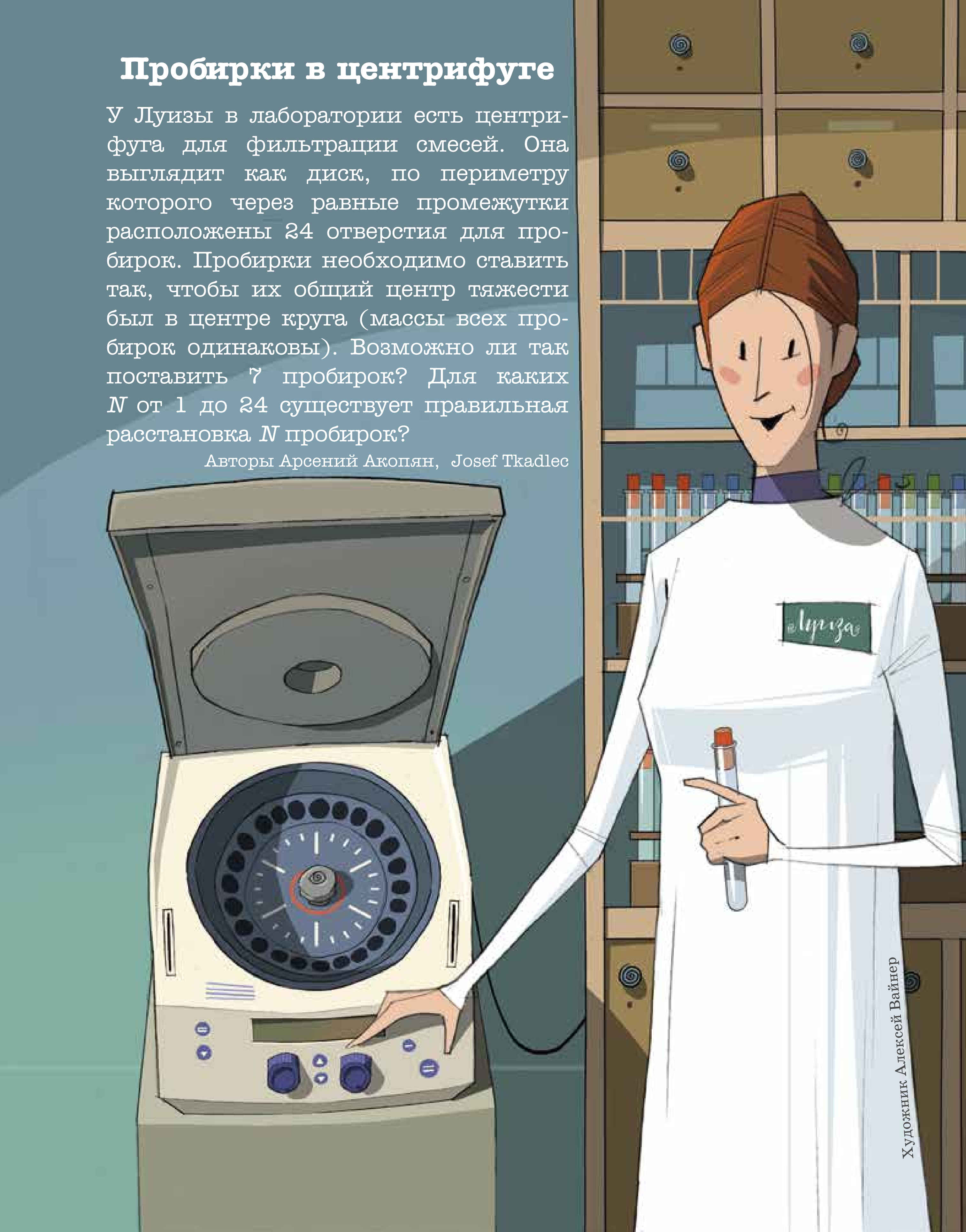
Но и это ещё не всё. Продолжение истории – в следующем номере!

Художник Мария Усеинова

Пробирки в центрифуге

У Луизы в лаборатории есть центрифуга для фильтрации смесей. Она выглядит как диск, по периметру которого через равные промежутки расположены 24 отверстия для пробирок. Пробирки необходимо ставить так, чтобы их общий центр тяжести был в центре круга (массы всех пробирок одинаковы). Возможно ли так поставить 7 пробирок? Для каких N от 1 до 24 существует правильная расстановка N пробирок?

Авторы Арсений Акопян, Josef Tkadlec



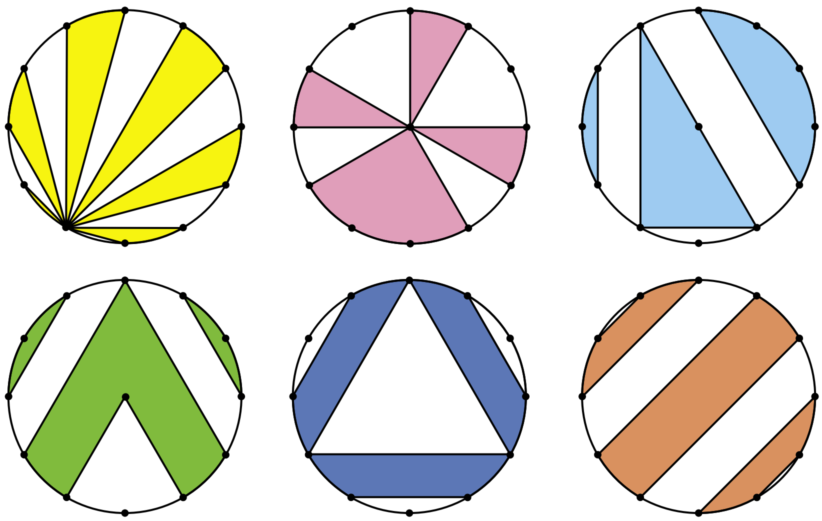
Художник Алексей Вайнер

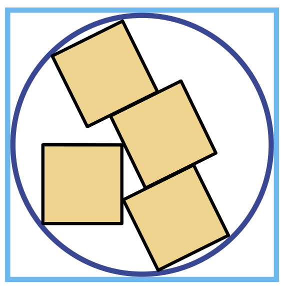
НАЙДИ ПЛОЩАДЬ!

Катриона Ширер (twitter.com/Cshearer41) регулярно публикует в интернете геометрические задачи. Вот несколько из них.

По стилю они не очень похожи на привычные школьникам задачи по геометрии (и не только потому, что в картинках используются разные цвета). Есть среди этих задач и совсем несложные, и те, где будет над чем поломать голову любителям геометрии. Кое-что посчитать, вероятно, придётся, но постарайтесь обойтись без громоздких вычислений.

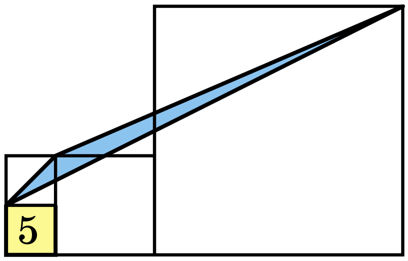
1–6. Какая часть каждого из кругов закрашена? (12 точек на окружности находятся на равных расстояниях. Единственная отмеченная точка внутри – центр круга.)

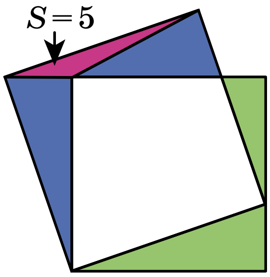




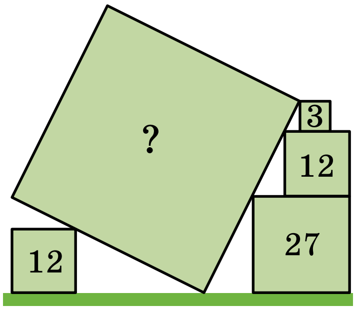
7. Какая доля площади большого квадрата закрашена? (Все маленькие квадраты одинаковые.)

8. Площадь левого нижнего квадрата равна 5. Найдите площадь синего треугольника. (На первый взгляд кажется, что данных недостаточно: ведь правый квадрат может иметь разные размеры. Попробуйте понять, почему от его размера ответ не зависит...)

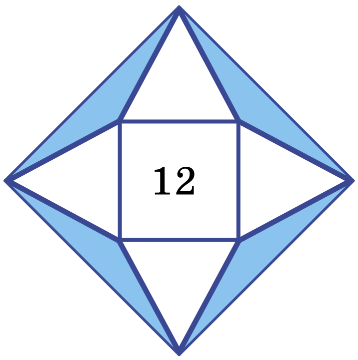




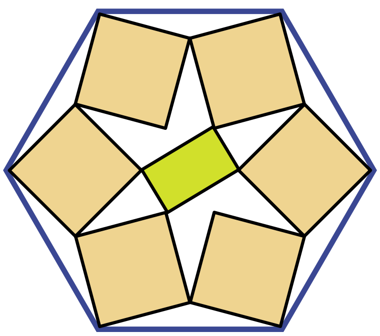
9. Два больших квадрата пересекаются так, как показано на рисунке. Какая площадь больше: закрашенная синим цветом или зелёным? На сколько?



10. Чему равна площадь большого квадрата? (Цифры внутри остальных квадратов – их площади.)



11. Чему равна закрашенная площадь? (Четыре треугольника, построенные на сторонах квадрата, равносторонние, площадь внутреннего квадрата равна 12.)



12. В правильный шестиугольник вписаны шесть одинаковых квадратов и один прямоугольник. Какую часть площади шестиугольника они занимают?

Художник Мария Усеинова

Ольга Кузнецова

Квакающие слова

Иногда слова, которые выглядят похоже, оказываются родственниками. Это неудивительно, ведь у людей из одной семьи часто одинаковые носы, глаза, волосы или коленки. Но бывает и наоборот. Если люди похожи, а близкого родства между ними нет, мы говорим, что их сходство – это совпадение. В неродственных словах тоже могут совпадать многие буквы. Или даже все. Чтобы проверить родство слов, недостаточно сравнить их между собой. Нужно выделить корень и обязательно заглянуть в этимологический словарь.

Возьмём несколько слов с одинаковой частью. Пусть это будут слова, которые «умеют квакать»: ква-с, ква-нтик, ква-кушка, ква-кша, ква-ртира, буква, а-ква-парк, э-ква-тор...

Проще всего с квакшами и квакушками. Они издают звуки, которые мы передаём как «ква» или «квак», – звукоподражания. Лягушки в Германии или Древнем Риме, по мнению жителей, «говорят» примерно так же. Зато в Англии вместо лягушек квакают утки. Ничего удивительного, и в русском существует цапля, которая называется *ква́ква* – видимо, из-за звуков, которые она издаёт. Всё это довольно условно. Но ясно, что *квакать* и *квакша* – родственные слова.

В XVI–XVII вв. на Руси существовали так называемые «бортные знамёна» – особые знаки, говорящие о праве собственности у бортников (они добывали мёд пчёл, живущих в дуплах деревьев): различные чёрточки, зарубки, «куриные лапки». Один из таких символов назывался *квакшун* (или *квакчин*), скорее всего, он был похож на лягушку.

Квас – ещё одно русское слово, но, по счастью, оно не имеет отношения к лягушкам. Связано оно с глаголом *киснуть*, потому что напиток получается в результате брожения и кисловат на вкус. *Кисель* – тоже его родственник. В «квасное» семейство можно смело отправить *закваску*, *простоквашу* и *квашеную* капусту, которую иногда прямо называют *кислой* капустой. **А каким словом из этой семьи называют и посуду, и тесто, и неповоротливого человека?**

Квартира – слово заимствованное. Но оно принадлежит к большой «квакающей» семье знакомых нам слов, связанных с четвёркой: *квартет* – ансамбль из четырёх исполнителей или произведение для четырёх партий, *квадрат* – равносторонний прямоугольный четырёхугольник, *квадрильон* – миллион в четвёртой степени и др. Сюда же относится слово *квадрига* – античная колесница с четвёркой коней. *Квадроцикл* (четырёхколёсный мотовездеход) можно назвать её правнуком. Как же все эти родственники относятся к *квартире*? Раньше горожане должны были обеспечивать жильём остановившихся в городе военных. Эта обязанность называлась четвертиной. Так что изначально *квартира* – наёмное жильё военных, а потом уже любое другое. **Вспомните ещё слова из семейства «четвертушек»**.

У *аквапарка* нельзя просто так оторвать первую «*а*», она входит в латинский корень *акв-*, который указывает на связь с водой, но отнюдь не с лягушками. *Акведук* – водопровод, *аквабайк* – водный мотоцикл, *аквапланирование* – опасное состояние, когда машина во время дождя теряет сцепление с дорогой. Точно так же нельзя разрывать корень у слова *буква*. В русском языке есть название дерева, которое состоит в родстве с буквами и букварями. **Попробуйте догадаться, что это за дерево**.

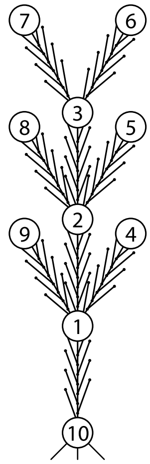
Экватор тоже связан с латинским корнем, на этот раз со значением равенства. Отсюда же заимствованное слово *эквивалент*. Государство *Эквадор* (*экватор* по-испански) получило своё название из-за географического положения.

Ну а в *Квантике* отчётливо виден корень *квант* – название журнала для старшеклассников и мельчайшей порции чего-либо (например, света).

«Кваканье» всех этих слов не доказывает их родство, зато отлично звучит в языковой игре. Предложите своим друзьям найти «булькающие» слова, «тикающие» или «мурчащие». Кто назовёт больше – тот и победил!

Художник Елизавета Сухно

Как Бусенька разбирала новогоднюю ёлку

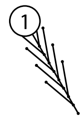


Огрыза внесла в комнату пустую коробку из-под ёлки и поставила её рядом с Бусенькой.

– Вы собираетесь разобрать новогоднюю ёлку? – спросил таракан Кузька. – Зачем? Ведь до Нового года ещё два дня!

– Да разве ж это ёлка? – проворчала Огрыза. – Это не ёлка, а какой-то рыбий скелет!

– Мы сейчас её разберём, а потом соберём заново – попушистее! – объяснила Бусенька. – Вот только работники, которые устанавливали ёлку, унесли с собою инструкцию. Придётся импровизировать.



– Чего тут импровизировать? – не понял Кузька.– Ёлка состоит из стандартных веточек. Быстренько повы́дергаем все ветки и сложим их в коробку! Вот и вся разборка.

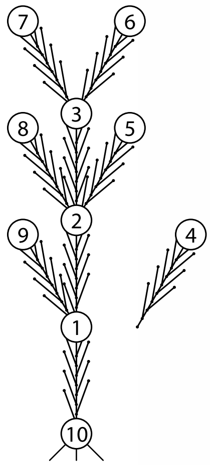
– Не торопись, – сказала Бусенька. – Чтобы высококачественно демонтировать ёлку, мы будем вести протокол, куда запишем, в каком порядке мы её разбирали!

– Зачем? – опять не понял Кузька.

– Чтобы при необходимости собрать такую же ёлку ещё раз.

– Протоколы и ведомости по моей части, – сказала Огрыза, доставая огромный гроссбух. – Вы разбирайте, а я всё запротоколирую!

– Тогда приступим, – сказала Бусенька. – Разбирать нужно так: будем по одной вынимать крайние веточки (те, на которых не крепятся другие ветки). Все ветки нашей ёлки пронумерованы, номер ветки записан на шарике, который крепится на конце ветки. Сначала найдём крайнюю веточку с самым маленьким номером. У нас это ветка номер 4. Вынем её, а в протокол запишем номер той ветки, куда она была прикреплена, а прикреплена она к ветке номер 1. Потом снова найдём крайнюю ветку с наименьшим номером и так далее.



– А номер оторванной ветки записывать не будем? – уточнил Кузька.

– Не будем, – подтвердила Бусенька. – Нечего канцелярщину разводить!

Друзья принялись за дело. Огрыза только успевала записывать:

1, 2, 3, 3, 2, 1, 2, 1.

– Последняя веточка вынута! – бодро доложил Кузька, – она крепилась к треноге. На треноге закреплён шарик номер 10.

– Для единообразия треногу с шариком 10 давайте тоже считать веткой, – предложила Бусенька.

– Хорошо. Последняя веточка крепилась к ветке 10, – повторил Кузька. Значит, можно записать в протокол 10. – Кузька собрался с мыслями и продолжил, выговаривая трудное слово: – Для единообразия!

– Не надо, – сказала Огрыза. – Последняя веточка всегда крепится к десятой. Это и так ясно. Нечего загромождать протокол несущественной информацией.

– А теперь давайте поймём, как по протоколу собрать ёлку обратно, – предложила Бусенька.

– Я же говорил, надо было записывать ветки, которые мы вынимаем! – обиженно сказал Кузька. – Сразу было бы ясно, какую ветку к чему прикреплять! Первым в протоколе записан номер 1. Значит, мы что-то оторвали от ветки номер 1. Но как же мы теперь узнаем номер оторванной веточки?

– Если подумать, – сказала Огрыза, – то этот номер очень даже несложно найти. Все номера, записанные в протоколе, – это номера тех веток, от которых мы открепляли крайние ветки. Значит, на собранной ёлке эти ветки крайними не были. А номера, которые НЕ встречаются в нашем протоколе, это и есть номера всех крайних веточек нашей ёлки.

– Вот в чём дело! – радостно воскликнул Кузька. – Раз в протоколе записаны только числа 1, 2 и 3, то значит, крайними ветками на ёлке были ветки с номерами 4, 5, 6, 7, 8, 9. Получается, что первой мы убрали ветку номер 4 и прикреплена она была к ветке номер 1! А дальше?

– Тут поблизости, я надеюсь, нет дятла Спятла? – спросила Бусенька. – Нет? Ну тогда можно смело сказать: а дальше – рекурсия! Запомним, что ветки номер 4 в нашей ёлке больше нет. И вычеркнем первое число (то есть единицу) из протокола. У нас останется протокол демонтажа более короткой ёлки!

– И чем это поможет? – опять не понял Кузька.

– Поможет, поможет, – сказала Бусенька, – давайте соберём ёлку до конца, только не эту, а более красивую. Например, вот такую:

1, 1, 10, 10, 1, 1, 10, 10.

Кстати, ветку 10 можно для краткости обозначить нулём, а протокол писать без запятых, как обычное восьмизначное число (правда, тогда оно может начинаться с нулей). Итак, мы собираем ёлку

11001100.

Командуй, а мы будем монтировать.

Кузька почесал затылок передней правой ногой, а потом на всякий случай ещё и средней правой.

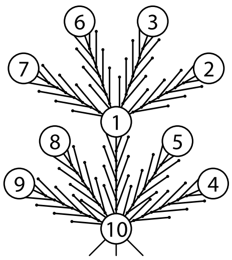
– Значит, так. В протоколе записаны ветки 1 и 10, они некрайние, а ветки со второй по девятую – крайние. Самая маленькая из них – ветка 2, судя по протоколу, она была прикреплена к ветке 1. Убираем ветку 2, стираем из протокола 1. У нас остаётся протокол

1001100.

Теперь некрайние ветки – 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. И протокол нам говорит, что наименьшая ветка 3 прикреплялась к ветке 1. Убираем ветку 3. Стираем из протокола 1. Остаются ветки 4, 5, 6, 7, 8, 9 и протокол 001100. Ага, ага, всё понятно. Ветка 4 прикреплялась к 10. Стираем. Остаются ветки 5, 6, 7, 8, 9 и протокол 01100. Ветка 5 прикреплялась к 10. Стираем. Остаются ветки 6, 7, 8, 9 и протокол 1100. Вообще-то странно: веток четыре и записей в протоколе четыре. Но ведь самую последнюю ветку мы договорились в протокол не записывать!

– Это потому что дальше ты уберёшь ветки 6 и 7, сотрёшь в протоколе две единицы, и ветка номер 1 станет крайней! – объяснила Бусенька.

– Вот здорово, – сказал Кузька, – ну тогда дальше всё просто: оставшиеся ветки 1 и 8 прикреплялись к ветке 10. Ветка 9 тоже крепилась к ветке 10, но мы это не записываем.



– Значит, приступаем к сборке! – и Бусенька с Огрызой быстро вдвоём собрали новую ёлку.

– Красотища, – сказал Кузька. – Давайте каждый день собирать новую ёлку! Сколько же разных ёлок можно изготовить из этого набора?

– Это смотря что считать разными ёлками, – сказала Бусенька. – Вот например, ёлка

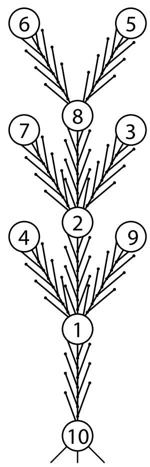
21882121

такая же, как та, что мы демонтировали, или другая?

– Почему это она должна быть такой же? – не понял Кузька. – У неё совсем другой протокол.

– Но форма-то похожа, – подсказала Огрыза.

– Другая! – уверенно заявил Кузька, – форма такая же, а веточки расположены совершенно иначе!



– Ну и что? – не сдавалась Огрыза. – Например ветки 9 и 4 расположены не так, как на первой ёлке, но мы же можем подвинуть их, чтобы 9 переехала на левую сторону, а 4 – на правую. На первой ёлке они именно так и располагались.

Кузька задумался.

– Конечно, ветки, которые крепятся на одном шарике, мы можем разворачивать как угодно. Но вот у той ёлки ветка 8 была крайней, а в этой ёлке она глубоко внутри! Этого без разборки не поправишь.

– Понятно, – сказала Бусенька, – тогда сообщаю: из этого набора можно собрать сто миллионов различных ёлок!

– Сколько-сколько?

– Сто миллионов!

Кузька в ужасе замахал лапами.

– Это же очевидно, – сказала Огрыза. – Любое восьмизначное число от 0000 0000 до 9999 9999 может служить протоколом для сборки ёлки. И все ёлки получатся разные!

– Сто миллионов ёлок... – уныло сказал Кузька. – Мы столько не проживём.

Художник Инга Коржнева

выпуск 27 2/3 ПРАВ/ДЫ

Сергей Федин

СЕРОВ, ПАВЕЛ I, Д'АКОСТА

Две из этих историй известны, а одна полностью придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности, спрятанной в тексте. Попробуйте!

СЕРОВ

Знаменитый русский художник Валентин Серов (1865–1911) в детстве совершенно не умел рисовать, но отличался необычайной находчивостью. Однажды прямо на уроке рисования он поспорил с учителем, что за минуту нарисует любое животное, причём так, что все в классе узнают его.

– Хорошо, – согласился учитель, и, склонившись к уху Серова, прошептал: – Тогда нарисуйте осла.

– Пожалуйста, – спокойно сказал Серов, склонился над листом бумаги, и за 20 секунд работа была готова. Повернувшись к учителю спиной, Валя показал своё творение одноклассникам.

– Кого я нарисовал? – спросил он у них.

– Осла, осла! – раздались удивлённые голоса, постепенно переходящие в громкий хохот.

– Вот видите, – повернулся Серов к учителю, – я выиграл. – И он показал ему рисунок, который мы приводим на иллюстрации (в уменьшенном масштабе). Не узнать осла было трудно – Серов, как вы поняли, ещё и написал на рисунке название животного.

После этого случая Валя Серов всерьёз увлёкся рисованием и вскоре стал лучшим учеником школы по этому предмету.

ПАВЕЛ I

В одну из своих поездок по стране император Павел I вместе со своей свитой остановился на ночлег в некоем селе. Он уже начал было готовиться ко сну, как вдруг его покой был нарушен. Ямщик по ошибке привёл в ту же избу придворного оператора (так тогда называли хирургов) Вилье.

Увидев императора, Вилье напугался до смерти. Но Павел был в тот момент благодушен и не стал никого наказывать. Вместо этого он начал выяснять у ямщика, как же так получилось.

Ямщик ответил, что повёл Вилье в лучшую избу, потому что тот сказал, что он – анператор.

– Врёшь, дурак, – расхохотался Павел. – Император – это я, а он – оператор!

Перепуганный ямщик бухнулся Павлу в ноги:

– Прости, батюшка, я не знал, что вас двое.

Д'АКОСТА

Шут Петра I Ян д'Акоста прибыл в Россию из Португалии. Когда он садился на корабль, один из провожавших его приятелей спросил:

– Твои отец, дед и прадед погибли в море. Неужели ты не боишься отправляться в плавание?

– А как умерли твои предки? – спросил в ответ д'Акоста.

– Благополучно скончались в своей постели.

– Так как же ты не боишься каждую ночь ложиться в кровать? – парировал находчивый д'Акоста.

Художник Капыч

Игорь Акулич

Заячье занятие

– Сегодняшнее занятие нашего математического кружка условно назовём заячьим.

– Почему?

– Потом скажу. Надо же интригу сохранить. А начнём вот с такой задачи, предложенной девятиклассникам на заключительном этапе XXVIII Всероссийской олимпиады в 2002 году (автор – Д. Ю. Кузнецов):

На шахматной доске стоят 8 ладей, не бьющих друг друга. Докажите, что среди попарных расстояний между ними найдутся два одинаковых. (Расстояние между ладьями – это расстояние между центрами полей, в которых они стоят.)

Не буду от вас с ходу требовать найти решение – вы ещё не девятиклассники, да и не участники Всероссийской олимпиады. Поэтому авторское решение изложу вам сам.

Но сначала давайте поговорим о расстояниях между центрами клеток, занятых ладьями. Никакие две ладьи, по условию, не бьют друг друга и, значит, не лежат на одной горизонтали либо вертикали. Поэтому если взять любые две ладьи, то каждая из них сдвинута относительно другой на m по горизонтали и на n по вертикали, где m и n – натуральные числа... кстати, какие значения они могут принимать?

– От 1 до 7!

– Верно. Если горизонтали (вертикали), в которых стоят ладьи, – соседние, то сдвиг равен 1, а больше 7 он быть не может – размеры доски не позволяют. И если считать, что доска разбита на поля со стороной 1, то расстояние между ладьями – это длина диагонали прямоугольника со сторонами m и n. И сколько это будет?

– Будет $\sqrt{m^2+n^2}$.

– Поясни.

–Диагональ прямоугольника есть гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами, равными сторонам этого прямоугольника. Теорема Пифагора...

– Молодец! Ну, а теперь слушайте. Рассмотрим семь пар ладей, стоящих в соседних столбцах (в 1-м и 2-м, во 2-м и 3-м и т.д.). По горизонтали ладьи каждой такой пары сдвинуты на 1, а по вертикали сдвиги могут быть разными. Но если два каких-то сдвига по

Принцип Дирихле

вертикали тоже одинаковы, то и расстояния между ладьями в таких парах одинаковы, потому что эти расстояния – диагонали одинаковых прямоугольников.

Значит, если имеются два одинаковых сдвига по вертикали – то всё в порядке, два одинаковых расстояния непременно найдутся. Ну а вдруг все эти сдвиги различны? Может такое быть, как вы думаете?

– А почему бы и нет? Ведь эти сдвиги могут иметь 7 значений – от 1 до 7, и здесь как раз 7 пар ладей в соседних вертикалях – столько же!

– Отлично! Автор задачи рассуждал так же: если все сдвиги различны, то среди них встречается по разу каждое из чисел от 1 до 7. В частности, есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 2 по вертикали и на 1 по горизонтали (назовём эти две ладьи *парой* *A*), и расстояние между ними равно $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. Запомним пока этот результат и рассмотрим теперь 7 пар ладей, стоящих в соседних *строках* (в 1-й и 2-й, во 2-й и 3-й и т.д.). Рассуждения здесь аналогичны, и потому либо найдутся две пары в соседних строках с равным сдвигом по горизонтали, либо есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 1 по вертикали и на 2 по горизонтали (*пара B*). Тогда расстояния в парах *A* и *B* совпадают – оба равны $\sqrt{5}$, но сами эти пары, очевидно, различны. Ну, как решение?

– Сложное! Не зря задача на олимпиаду попала...

– Верно! Но задача решается и не так хитро, если сразу воспользоваться великим и вместе с тем простым *принципом Дирихле*! Только не пугайтесь грозного названия. Иоганн Петер Густав Лежен Дирихле – немецкий математик XIX века. Он и сформулировал свой принцип, который чаще всего почему-то излагают в виде истории про зайцев (или кроликов), сидящих в клетках. Звучит он так: если в клетках сидят зайцы, причём зайцев больше, чем клеток, то найдётся хотя бы одна клетка, в которой сидит не меньше двух зайцев. Как вам такое утверждение?

– Так это же очевидно!

– Ну, скажем так, *почти очевидно*. Но доказывается совсем просто, например, методом «от противного». Предположим, что в каждой клетке сидит не более одного зайца. Тогда зайцев будет *не больше*,

чем клеток, что противоречит условию! Значит, наше предположение было неверным, и на самом деле в какой-то клетке сидят не менее двух зайцев. Вот вам принцип Дирихле в самой что ни на есть простой и наглядной форме.

Да, но к чему всё это? А к тому, что при решении многих задач нередко удаётся успешно применить принцип Дирихле, правильно подобрав «клетки» и «зайцев». Да и в авторском решении нашей олимпиадной задачи принип Дирихле незаметно используется (потом найдите, где). Но давайте применим его в самом начале. Итак, требуется доказать, что среди попарных расстояний между ладьями имеются два одинаковых. Предположим, что пары ладей (и соответствующие расстояния между этими ладьями) – это зайцы. Сколько всего у нас зайцев? Кто подсчитает?

– Давайте я. Всего ладей 8, поэтому первую ладью пары можно выбрать восемью способами. Второй же ладьёй может быть одна из семи оставшихся ладей. Поэтому всего имеем $8 \times 7 = 56$ пар.

– Неправильно! Кто поправит?

– Я! Надо ещё поделить на 2. Ведь если мы выбрали ладью $Л_1$, а потом в пару к ней ладью $Л_2$, то это будет та же самая пара, как если бы мы сначала выбрали ладью $Л_2$, а потом $Л_1$. Поэтому ответ таков: $56/2 = 28$.

– Теперь верно! Итак, имеем 28 зайцев – пар ладей, каждой паре соответствует некоторое число – расстояние между этими ладьями. Ну, а клетки – это набор вообще *всех различных* значений, которые могут принимать расстояния между ладьями. Если окажется, что клеток *меньше*, чем зайцев, задача решена – среди расстояний найдутся два одинаковых, ибо два зайца-расстояния попадут в одну и ту же клетку-значение.

Осталось определить, сколько различных значений могут принимать всевозможные расстояния между ладьями. Мы уже знаем, что в общем виде такие расстояния записываются как $\sqrt{m^2+n^2}$, где m и n – целые от 1 до 7. Ну, поскольку от перестановки слагаемых сумма не меняется, можно смело ограничиться пределами $1 \leqslant m \leqslant n \leqslant 7$. Сколько разных пар (m, n) здесь получается? Если меньше 28 – то превосходно!

– Можно, я посчитаю? Для $m = 1$ число n может принимать 7 значений, от 1 до 7. Для $m = 2$ – уже только 6 значений, от 2 до 7. И так далее. Значит, всего получается, что различных пар (m, n) образуется $7 + 6 + 5 + ... + 1 = 28$. Столько же, сколько и зайцев! Значит, принцип Дирихле здесь неприменим?

– Нет уж, всё-таки применим! Мы, образно говоря, за деревьями леса не увидели. Что с того, что у нас получилось 28 пар (m, n)? А вдруг, на наше счастье, какие-то две из этих пар дадут одно и то же значение $\sqrt{m^2+n^2}$? Тогда возможных значений (то есть клеток) окажется меньше, чем пар ладей (то есть зайцев). Поищите-ка такие совпадения...

– Я нашёл! Если $m = 1$ и $n = 7$, то $\sqrt{1^2+7^2} = \sqrt{50}$. Если же $m = n = 5$, то $\sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50}$ – то же самое!

– Конгениально! Итак, из 8 ладей можно составить 28 пар, а возможных значений, которые могут принимать расстояния между ладьями в парах – уж точно меньше 28. Значит, для каких-то двух пар расстояния между ладьями совпадут, что и требовалось. Все довольны? Вижу, да. Кроме вон того молодого человека, который, как я заметил, почему-то не принимал активного участия в нашей беседе. В чём дело?

– Да я тут, пока вы обсуждали, стал рисовать всякие разные расположения не бьющих друг друга ладей на доске – наугад, какие получатся. Несколько десятков нарисовал – вот, посмотрите! И обнаружил, что обязательно имеются *три* одинаковых расстояния между ладьями. Три, а не два!

– Три – это очень существенно! Принцип Дирихле здесь, пожалуй, мы не пристроим никак. В общем, подумать надо. Но, естественно, не сейчас. Давайте так: каждый из вас (да и я тоже) продумаем гипотезу нашего коллеги и попытаемся выяснить, верна ли она. Если да – попробуем доказать, если нет – опровергнуть. Задание понятно? Всего хорошего!

...Вот так драматично и загадочно закончилось заячье занятие математического кружка. Попробуйте самостоятельно разобраться с гипотезой о трёх одинаковых попарных расстояниях между ладьями. Если не получится – воспользуйтесь помощью компьютера или посмотрите ответ в конце журнала.

Художник Алексей Вайнер

Владимир Красноухов

Квадратура кружков

Эту задачу предлагает нам Вил Страйбос (Wil Strijbos), известный изобретатель головоломок из города Венло в Нидерландах. Головоломка включает в себя картонную пластинку (рис. 1) и игровые элементы – пять плоских фигур, образованных соединением кружков по схеме, показанной на рисунке 2. На пластинке нанесена сетка 5×5 из точек, расстояние между ближайшими точками равно диаметру кружка (d). Центр сетки обозначен символом C.

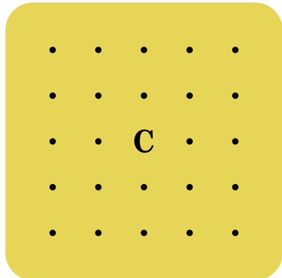


Рис. 1

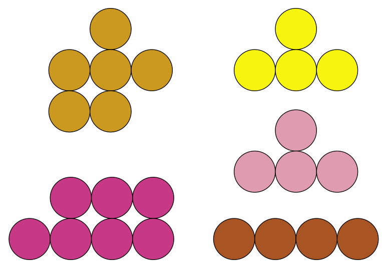


Рис. 2

Задача 1 (Вил Страйбос). Уложите элементы на пластинку так, чтобы образовался квадрат. При этом центр (C) должен быть закрыт. Элементы можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

На рисунке 3 мы привели пример, когда задача «почти решена» – все элементы лежат на пластинке, но... получился не совсем квадрат: один кружок выступает из квадрата, и внутри дырка (центр не прикрыт).

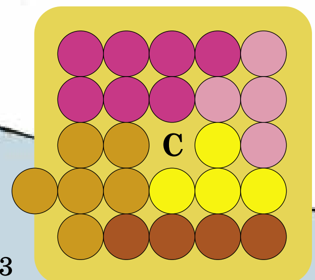
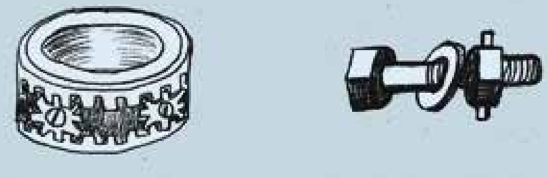


Рис. 3

Найдите правильное решение.

Предлагаем решить ещё пару задач с этими же игровыми элементами. Для этого выложите все элементы на стол (пластинка не понадобится).

Задача 2. Соберите симметричную башню максимальной высоты.



Задача 3. Соберите симметричную фигуру максимального диаметра. (Фигура должна быть связной: её нельзя разбить на две части, не соприкасающиеся друг с другом. Диаметр фигуры – наибольшее возможное расстояние между двумя её точками.)

Вот примеры башен (рис. 4) и симметричных фигур (рис. 5). Высота башен равна $11d$ и ~$10{,}9d$. Диаметр фигур равен $11d$, ~$11{,}2d$ и ~$10{,}9d$.

Но это далеко не рекордные достижения.

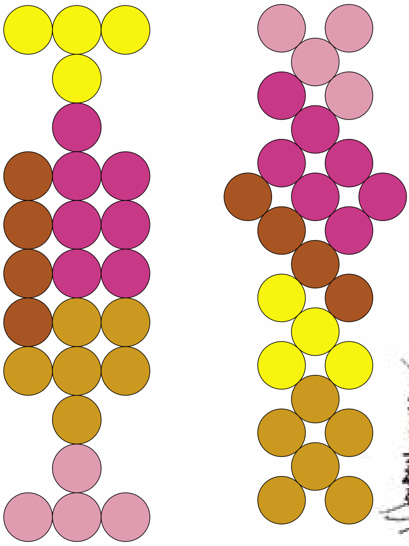


Рис. 4

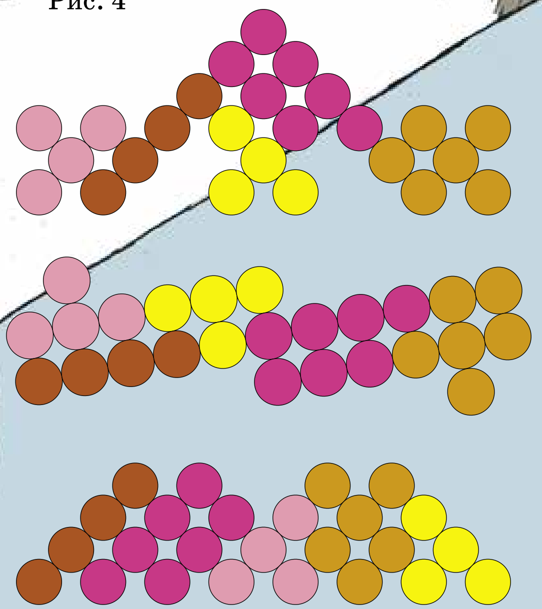


Рис. 5

Желаем успехов!

Художник Артём Костюкевич

XL ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ

7 и 21 октября 2018 года состоялся осенний тур XL Турнира городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим базовый и сложный варианты для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов (баллы за пункты одной задачи суммируются).

Базовый вариант

1 (4 балла). Окружность, проходящая через вершину B прямого угла и середину гипотенузы прямоугольного треугольника ABC, пересекает катеты этого треугольника в точках M и N. Оказалось, что $AC = 2MN$. Докажите, что M и N – середины катетов треугольника ABC.

Михаил Евдокимов

2 (4 балла). Найдите все натуральные n, удовлетворяющие условию: числа 1, 2, 3, ..., $2n$ можно разбить на пары так, что если сложить числа в каждой паре и результаты перемножить, получится квадрат натурального числа.

Фольклор

3. Клетчатый прямоугольник размера 7×14 разрезали по линиям сетки на квадраты 2×2 и уголки из трёх клеток. Могло ли квадратов получиться

а) **(1 балл)** столько же, сколько уголков;

б) **(3 балла)** больше, чем уголков?

Михаил Евдокимов

4 (5 баллов). У Насти есть пять одинаковых с виду монет, среди которых три настоящие – весят одинаково – и две фальшивые: одна тяжелее настоящей, а вторая на столько же легче настоящей. Эксперт по просьбе Насти сделает на двухчашечных весах без гирь три взвешивания, которые она укажет, после чего сообщит Насте результаты. Может ли Настя выбрать взвешивания так, чтобы по их результатам гарантированно определить обе фальшивые монеты и указать, какая из них более тяжёлая, а какая более лёгкая?

Рустэм Женодаров

5 (5 баллов). Назовём девятизначное число *красивым*, если все его цифры различны. Докажите, что

существует по крайней мере 1000 красивых чисел, каждое из которых делится на 37.

Михаил Евдокимов

Сложный вариант

1 (5 баллов). В треугольнике ABC точка M – середина стороны BC, точка E – произвольная точка внутри стороны AC. Известно, что $BE \geqslant 2AM$. Докажите, что треугольник ABC тупоугольный.

Наири Седракян

2 (6 баллов). На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?

Михаил Кузнецов

3 (8 баллов). Требуется записать число вида 77...7, используя только семёрки (их можно писать и по одной, и по нескольку штук подряд), причём разрешены только сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень, а также скобки. Для числа 77 самая короткая запись – это просто 77. А существует ли число вида 77...7, которое можно записать по этим правилам, используя меньшее количество семёрок, чем в его десятичной записи?

Сергей Маркелов

4 (8 баллов). Доска 7×7 либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль 2×2. Разрешается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включённый детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблём. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гаранти-

XL ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ

рованно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает?

Рустэм Женодаров

5 (8 баллов). Равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Прямая BO пересекает отрезок AD в точке E. Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, описанных около треугольников ABE и DBE соответственно. Докажите, что точки O_1, O_2, O, C лежат на одной окружности.

Алексей Заславский

6. Докажите, что

а) (7 баллов) любое число вида $3k-2$, где k целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел;

б) (3 балла) любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел.

Наири Седрякян

7. В виртуальном компьютерном государстве не менее двух городов. Некоторые пары городов соединены дорогой, причём из любого города можно добраться по дорогам до любого другого (здесь и далее переходить с дороги на дорогу разрешается только в городах). Если при этом невозможно, начав движение из какого-то города и не проходя дважды по одной и той же дороге, вернуться в этот город, государство называется *простым*, иначе – *сложным*.

Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя указывает на каждой дороге направление, в котором по ней можно двигаться, и помещает в один из городов туриста. Далее за ход Петя перемещает туриста по дороге в разрешённом направлении в соседний город, а Вася в ответ меняет направление одной из дорог, входящей или выходящей из города, куда попал турист. Вася победит, если в какой-то момент Петя не сможет сделать ход. Докажите, что

а) (5 баллов) в простом государстве Петя может играть так, чтобы не проиграть, как бы ни играл Вася;

б) (7 баллов) в сложном государстве Вася может гарантировать себе победу, как бы ни играл Петя.

Максим Дидин

Материал подготовил
Сергей Дориченко

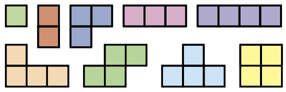
Художник Сергей Чуб

НАШ КОНКУРС, II ТУР (Квантик № 10, 2018)

6. *Найдите наименьшее такое натуральное число, что и в его записи, и в записи удвоенного числа встречаются все десять цифр от 0 до 9.*

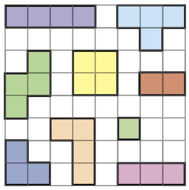
Ответ: $1023456789 \times 2 = 2046913578$. Наименьшее число из всех цифр от 0 до 9 подходит.

7. *В наборе присутствуют по одному разу всевозможные фигурки из одной, двух, трёх и четырёх клеток (см. рисунок).*



а) Выложите их «по клеточкам» на доску 8×8 так, чтобы никакие две фигурки не перекрывались и не касались даже углами (фигурки разрешается переворачивать).

б) Можно ли это сделать, если дополнительно требуется, чтобы на доске поместилась ещё одна одноклеточная фигурка, не имеющая общих точек с уже выложенными?

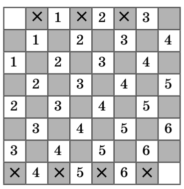


а), б). Пример, когда все фигурки выложены и есть место ещё для одной одноклеточной фигурки, приведён на рисунке.

8. *На планете Шелезяка в году 12 месяцев, во всех месяцах поровну дней. Её юному жителю Плексу меньше 100 лет. Возраст Плекса в годах представляется несократимой дробью, в числителе и знаменателе которой – квадраты целых чисел. А его возраст в месяцах – куб целого числа. Сколько Плексу лет и месяцев?*

Ответ: 2 года и 3 месяца. Пусть Плексу x^3 месяцев. Тогда ему $x^3/12$ лет. По условию $x^3/12 = m^2/n^2$. Перепишем это равенство в виде $n^2x^2x = m^2 \cdot 4 \cdot 3$. Разложим обе части на простые множители. Справа в нечётной степени стоит только 3. Значит, и слева тоже, откуда $x = 3y^2$, где y – целое. Если $y = 1$, то $x = 3$ и Плексу 2 года 3 месяца. Если $y \geqslant 2$, то $x \geqslant 12$ и Плексу не менее 144 лет, что неверно по условию.

9. *На шахматной доске 8 × 8 расставили 7 слонов так, чтобы никакие два не били друг друга. Обязательно ли после этого удастся переставить каждого слона на другое поле ходом коня так, чтобы в новой расстановке никакие два слона по-прежнему не били друг друга?*



Ответ: нет. Контрпример см. на рисунке (слоны это крестики). Действительно, после перестановки слонов ходом коня каждый слон поменяет цвет поля, на котором стоит, причём ни один слон не попадёт в угловые клетки доски. Тогда все слоны окажутся на 6 диагоналях (они обозначены цифрами). Поскольку слонов 7, два из них попадут на одну диагональ и будут бить друг друга.

10. *а) В зале музея стоят по кругу 5 одинаковых шкатулок. Каждый вечер начальник охраны запирает две шкатулки по своему выбору, положив в одну из них бесценный алмаз. Подкупленный работник музея видит действия начальника и хочет оставить взломщику подсказку, где алмаз. Для этого он открывает крышки ровно у двух незапертых шкатулок, а остальные не трогает. Как ему заранее договориться со взломщиком, чтобы тот, придя ночью в музей и увидев, у каких двух шкатулок открыты крышки, сразу понял, где лежит алмаз?*

б) Та же задача, но в зале стоят по кругу 33 шкатулки, начальник запирает 16 шкатулок, положив в одну алмаз; взломщик должен понять, где алмаз, по двум шкатулкам, у которых открыты крышки.

а), б) Мысленно будем считать, что шкатулки стоят по кругу через равные промежутки. Пусть работник откроет пару шкатулок, стоящих на одинаковом расстоянии от шкатулки с алмазом. Такая пара незапертых шкатулок всегда найдётся, потому что всего пар 16 (2 в пункте а), а начальник запер лишь 15 шкатулок (одну в пункте а), не считая той, в которой алмаз. Поскольку всего шкатулок нечётное число, для двух данных шкатулок найдётся единственная шкатулка на равном расстоянии от них, так что взломщик легко её найдёт.

СПИЧЕМАТИКА (Квантик № 11, 2018)

В задаче 1 нужно сломать спичку пополам и выложить из половинок крестик-умножение. В задаче 2 нужно сломать спичку около головки: часть с головкой – это запятая, остальное надо выбросить. В итоге получается:

1. $1 - 1 = 7 \cdot 0$

2. $6/5 = 1{,}2$

3. 67Р = $1 (курс доллара к рублю в один из дней августа).

ЧЕТЫРЕ ТУЗА (Квантик № 11, 2018)

Квантик может положить взятую карту обратно на место двумя способами: либо тем же краем карты к себе, что и в начале, либо противоположным. Пусть он её кладёт не так, как она лежала до этого (что и произошло в комиксе).

Квантик сравнивает, как лежат открытые карты в конце фокуса и в начале. Если одинаково, он брал туз бубен – у этой карты два положения симметричны. В остальных случаях ровно одна карта будет лежать не так, как в начале – её-то и брал Квантик.

XIII ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР (Квантик № 11, 2018)

1. Ответ: в точке D. Из точки C гонщики поехали в разные стороны, каждый развернулся в какой-то момент, и следующая встреча произошла в точке D спустя время t после выезда из C. После этого *каждый поехал обратно по тому же самому пути, по которому приехал, и с той же скоростью*! Ясно, что они одновременно вернутся в точку C спустя то же время t, затем одновременно вернутся в D, и так будут поочерёдно встречаться то в C, то в D.

2. Ответ: 863179. Из цифр 0, 2, 4, 5, 6, 8 в искомом числе может быть не более двух, иначе хотя бы одно из трёхзначных чисел будет оканчиваться на одну из этих цифр и не будет простым. Поэтому в искомом числе не более 6 цифр (1, 3, 7, 9 и ещё две из 6 взятых выше цифр). Если в нём 6 цифр, то две первые цифры должны быть из 6 вышеперечисленных, а для наибольшего значения попробуем начать с 86. Далее число однозначно восстанавливается, так как $869 = 11 \cdot 79$, $867 = 3 \cdot 289$, $639 = 3 \cdot 213$, $637 = 7 \cdot 91$, $319 = 11 \cdot 29$ – составные. А числа 863, 631, 317 и 179 – простые.

3. Ответ: 6. Так как 9 толстых учебников помещаются на полке, 3 толстых учебника занимают не больше трети полки. Аналогично, 5 тонких учебников занимают не больше трети полки. Тогда 5 тонких учебников и 6 толстых занимают не больше $1/3 + 2/3$ полки, что равно 1, то есть с 5-ю тонкими поместится 6 толстых.

Докажем, что 7 толстых учебников уже не влезут. Так как 10 толстых учебников не помещаются на полке, толстый учебник занимает больше $1/10$ полки. Аналогично, тонкий учебник занимает больше $1/16$ полки. Тогда 7 толстых и 5 тонких учебников занимают больше $7/10 + 5/16$ полки, что равно $81/80$ и больше 1.

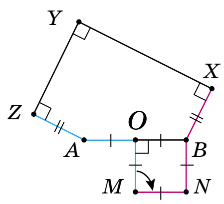
4. Ответ: 2018-я. Начнём с 1 и будем приписывать справа степени двойки по очереди. Заметим, что заведомо 12 делится на 2^1, 124 – на 2^2, и т.д.: приписывание 2^{k+1} справа к текущему числу можно описать как умножение текущего числа на не менее чем первую степень 10 (что даёт делимость на бóльшую степень двойки) и прибавление 2^{k+1}, так что если текущее делится на 2^k, то следующее делится на 2^{k+1}.

Поэтому итоговое число делится на 2^{2018}. А на 2^{2019} не делится: при последнем приписывании оно получилось из числа, кратного 2^{2017}, умножением на более чем первую степень 10 (что даёт делимость хотя бы на 2^{2019}) и прибавлением затем числа 2^{2018} (на 2^{2019} не делится).

5. Рассмотрим прямой угол с вершиной O. Мы решим задачу, если на одном его луче отметим точку A на целом расстоянии d от O, а на другом луче – остальные 2017 точек на таких целых расстояниях от O, чтобы расстояния от A до всех них, кроме одной, были целыми.

Рассмотрим такие пары целых чисел (a,b), что $a > b$ и $2ab = d$. Для каждой такой пары можно взять точку на втором луче на расстоянии $a^2 - b^2$ от O. Тогда расстояние до A равно $\sqrt{(2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2} = a^2 + b^2$, то есть оно целое. Пусть $d = 2^{4035}$. На втором луче возьмём 2016 точек на расстояниях от O, соответствующих парам $(2^{4033}, 2)$, $(2^{4032}, 2^2)$, ..., $(2^{2018}, 2^{2016})$, и ещё одну точку B на расстоянии 1 от O (так как $2^{2 \cdot 4035} + 1$ – не квадрат, AB не будет целым).

6. Докажем, что биссектрисы всех углов XYZ пересекаются в точке M, являющейся концом перпендикуляра, отложенного от середины стороны AB во внешнюю сторону пятиугольника на расстояние, равное половине AB.

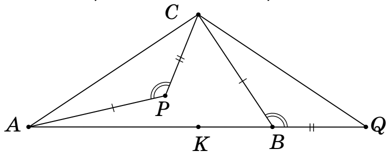


Так как $BX \perp XY$, $XY \perp YZ$, $YZ \perp ZA$, то $BX \perp ZA$. Повернём плоскость вокруг точки M на 90° так, чтобы точка A перешла в точку B. Тогда ломаная $MOAZ$ (см. рисунок) перейдёт в ломаную $MNBX$ (так как сумма углов OAZ, OBX и OBN равна 360° и M вне пятиугольника).

Но тогда прямые ZY и XY находятся на равном расстоянии от M (потому что перпендикуляр к прямой ZY перейдёт в перпендикуляр к прямой XY). Так как M находится внутри угла XYZ (обоснуйте с помощью выпуклости пятиугольника), из равенства расстояний следует, что M лежит на биссектрисе угла XYZ.

7. На продолжении стороны AB отложим отрезок BQ, равный CP. Тогда углы APC и CBQ

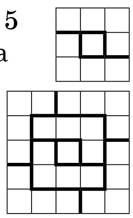
равны, а значит, треугольники APC и CBQ также равны по двум сторонам и углу между ними. Итак, $AC=CQ$, и $AK=KB+BQ=KQ$. Тогда CK – медиана в равнобедренном треугольнике ACQ. Значит, CK – высота, и $CK\perp AB$.



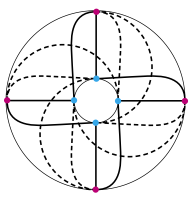
8. Ответ: $X=D$. Проведём из точки D три луча, продолжающих отрезки AD, CD и BD. Эти лучи делят плоскость на три части (в одной лежит вершина A, в другой – B, в третьей – C). Точка X лежит в одной из частей – пусть там, где A (другие случаи аналогичны). Тогда D лежит в треугольнике BXC, откуда $XB+XC\geqslant DB+$ $+DC$ (докажите с помощь неравенства треугольника, продлив BD до пересечения с CX), и $XA+$ $+XD\geqslant DA$ по неравенству треугольника. Первое неравенство обращается в равенство лишь для $X=D$, то есть для других X сумма больше.

9. Ответ: 1. Одна тройка всегда есть: подходят диагональ a наибольшей длины и выходящие из её концов диагонали b и c (так как b и c пересекаются, то $b+c>a$, но $a\geqslant b$ и $a\geqslant c$, откуда все неравенства треугольника выполнены).

Вот пример, когда удачная тройка одна. Возьмём правильный треугольник ACE со стороной 1, проведём прямую через середины AC и CE и на этой прямой выберем точки B и D так, чтобы $ABCDE$ был выпуклым и $BE=100$, $AD=10000$. Диагонали пятиугольника $ABCDE$ равны тогда 1, 1, 100, 10000, а пятая диагональ (BD) заведомо не меньше 10001 (докажите!), и треугольник смогут образовать лишь три наибольшие диагонали.



10. Указание: квадраты 3×3 и 5×5 без центральной клетки режутся на данные фигурки (см. рисунки). Докажите, что квадратная рамка с нечётной стороной и толщиной в две клетки режется на две данные фигурки и прямоугольники 2×4 (составленные из двух фигурок).



11. Ответ: можно, см. рисунок.

12. Ответ: 2,5 минуты. Такое время получится, если все муравьи поползут по кратчайшему пути в середину одного и того же ребра.

Докажем, что меньшего времени не хватит. Рассмотрим последнюю встречу, назовём встретившихся там муравьёв «финалистами». Точка встречи K лежит на каком-то ребре и отстоит от одной из вершин куба не менее чем на 2,5 ребра; пусть в этой вершине изначально сидел муравей Петя. Если Петя – финалист, то прошло не меньше 2,5 минут от начала. Если Петя не финалист, возьмём любого финалиста – Петя с ним уже встретился и если бы полз после той встречи вместе с финалистом, то попал бы в K как раз к моменту последней встречи, то есть прошло бы не менее 2,5 минут.

13. Ответ: при всех натуральных $k\leqslant n^2$.

Рассмотрим самую верхнюю строку с чёрными клетками. Возьмём в ней самую левую чёрную клетку A и отрежем прямоугольник, состоящий из A и всех клеток, которые не правее и не ниже A. Двигаясь далее по строке, дойдём до следующей чёрной клетки B и отрежем прямоугольник, состоящий из B и всех ещё не отрезанных клеток, которые не правее и не ниже B, и т.д. Дойдя до последней чёрной клетки в строке, отрежем прямоугольник из всех оставшихся клеток, которые не ниже этой клетки. В отрезанных прямоугольниках по одной чёрной клетке, и мы уменьшили высоту доски. Смещаемся в следующую строку с чёрными клетками и действуем аналогично. Дойдя до последней такой строки, будем включать в прямоугольники все оставшиеся клетки, которые не правее очередной чёрной клетки.

14. Ответ: 8. Двух (и более) рыцарей быть не может, потому что они ответят одинаково друг про друга. Значит, рыцарь не может дать ответ «Знакомый рыцарь», поэтому все, кто так ответит – точно лжецы. Среди ответов любых двух лжецов друг про друга найдётся ответ «Знакомый рыцарь», потому что среди остальных двух возможных вариантов ответа один верный. Так мы определим всех лжецов, кроме, быть может, одного – итого хотя бы 8 человек.

Пусть среди 10 человек один рыцарь, и один лжец прикидывается рыцарем; назовём его псевдорыцарем. Пусть все остальные лжецы знакомы с псевдорыцарем и незнакомы с рыцарем, и говорят про рыцаря и про псевдорыцаря «Знакомый рыцарь». А рыцарь и псевдорыцарь, в свою очередь, говорят про остальных лжецов «Не знаю». Тогда псевдорыцарь и рыцарь могут быть знакомы или нет, и если в первом случае рыцарь скажет «Это мой знакомый лжец», а псевдорыцарь – «Я его не знаю», а в другом – наоборот, мы их никак не отличим.

15. Пусть у Даши n друзей. Тогда её 5 фото получили более $5n/2 > 2n$ лайков. Поэтому найдётся друг, поставивший хотя бы три лайка – скажем, фото 1, 2, 3. Для фото 4, 5 найдётся друг, поставивший лайки им обеим. Вместе с первым другом они дают нужную пару (либо это один человек, поставивший 5 лайков, тогда второго друга выбираем произвольно).

16. Ответ: 76, $3\cdot 26$, $5\cdot 16$, $15\cdot 6$, $25\cdot 4$, $75\cdot 2$. Заметим, что если двое дружат, то любой другой либо дружит с обоими, либо ни с кем из них. Значит, джентльменов можно разбить на группы, в которых каждый дружит с каждым, а люди из соседних групп не дружат между собой. Тогда в клубе вне каждой группы будет 75 человек (враги любого из этой группы). Значит, в группах людей поровну. Пусть групп всего k, в каждой n человек. Тогда $n(k-1)=75$, и, перебирая разложения 75 на множители, находим возможные варианты: $n=1$, $k=76$; $n=3$, $k=26$; $n=5$, $k=16$; $n=15$, $k=6$; $n=25$, $k=4$; $n=75$, $k=2$; все они подходят.

17. Ответ: у второго. Пусть если из какого-то числа можно получить отрицательное, второй так и делает, а если нельзя, вычитает из числа, из которого своим последним ходом первый не вычитал. Тогда получим по индукции, что после $k \leqslant 98$ ходов числа будут $301-3k$ и $201-2k$. Поэтому после того, как каждый сделал 98 ходов, на доске останется 7 и 5. Далее легко разобрать все варианты ходов первого.

18. Перенумеруем места в шеренге числами от 0 от 2^n-1 и дадим каждому месту в шеренге шифр из n нулей и единиц – двоичное разложение его номера. Так, для $n=3$ шифрами будут 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Заметим, что у первой половины мест шифр начинается на 0, а у второй – на 1. Покажем, что по команде «Перестрой-СЯ!» солдат переходит по такому правилу: берёт шифр своего места, переставляет последнюю цифру в начало и следует на место с получившимся шифром (то есть с места $a_1a_2\ldots a_n$ идёт на место $a_na_1\ldots a_{n-2}a_{n-1}$).

Когда солдаты рассчитываются на первый-второй, «первые» – это те, у которых шифр места оканчивается на 0. По указанному правилу они заняли бы все места в первой половине шеренги, сохраняя порядок, то есть построились бы как раз так, как по команде «Перестрой-СЯ!». Аналогично, «вторые» фактически тоже пользуются указанным правилом.

Но тогда за n перестановок солдат с места с шифром $a_1a_2\ldots a_n$ перейдёт на место с тем же шифром, то есть вернётся в исходное положение.

19. Ответ: 5. Пример, когда троп 5, дан на рисунке 1. Чтобы доказать, что меньше 5 троп не хватит, раскрасим белые клетки в два цвета (жёлтый и красный) так, как показано на рисунке 2. Заметим, что жёлтых клеток 20, а красных 30, и есть лишь 5 пар соседних красных клеток. Если временно считать каждую из этих пар за одну красную клетку, получим, что в каждой слоновьей тропе красных клеток максимум на 1 больше, чем жёлтых. Если троп k, суммарно красных клеток в них тогда максимум на k больше, чем жёлтых, но вспомнив, что каждую из 5 пар соседних красных клеток мы могли посчитать за одну клетку, получаем в итоге, что красных клеток на доске максимум на $k+5$ больше, чем жёлтых. Но тогда $k+5 \geqslant 30-20=10$, откуда $k \geqslant 5$.

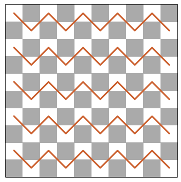


Рис. 1

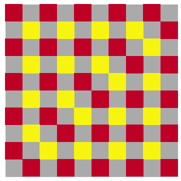


Рис. 2

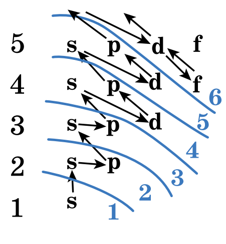
20. Ответ: $2n-1$ (можно покрасить весь левый столбец и всю верхнюю строку).

В каждой строке найдём расстояния от самой левой закрашенной клетки до остальных. Если в двух разных строках встретилось одно и то же расстояние, соответствующие клетки дают параллелограмм. И в одной строке все расстояния различны, так что каждое возможное расстояние встретится не более одного раза.

Самых левых клеток в строках не более n, а остальные клетки соответствуют различных расстояниям, которых не более $n-1$ (ведь расстояния целые и не превосходят $n-1$). Тогда всего закрашенных клеток не более $2n-1$.

ДОМ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ

1. Стрелки – порядок заполнения уровней, синие линии – границы горизонтальных рядов в таблице Менделеева. Синие цифры – номер ряда, на котором заполняются эти коридоры.



Иногда порядок движения по стрелкам чуть нарушается – см. задачи 2–4.

2. $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^5\ 4s^1$. Атом хрома –

как раз исключение из «правила стрелок»: при появлении 24-го электрона (и поселении его в d-коридоре третьего этажа) один электрон из уже было заполненного коридора 4s вдруг «сбегает» вниз, в коридор 3d. Так что на внешнем, четвёртом уровне – этаже – опять один электрон!

3. У атомов лантаноидов новые электроны «заселяются» в коридор f четвёртого этажа, который до сих пор пустовал. А у актиноидов – в коридор f пятого этажа. Поэтому эти клеточки в таблице покрашены новым, зелёным цветом. Место для f-коридора в таблице не предусмотрено, поэтому все лантаноиды – вся строка – в таблице «помещаются» в одну клеточку. Ту, которая соответствует одному электрону на этаже 5d. И действительно, у самого лантана новый, 57-й электрон поселяется на 5d. А уж следующие попадают на 4f, и единственный электрон с 5d «сбегает» к ним. Пока не заполнится весь этаж 4f, этот электрон так и переселяется то туда, то сюда. В итоге у нескольких лантаноидов на уровне 5d есть один электрон, у остальных – ни одного. Поскольку оба эти коридора «глубоко внизу», есть ли на них электроны, нет ли – снаружи почти не заметно. Поэтому все лантаноиды похожи друг на друга.

Примерно так же всё обстоит и у актиноидов.

4. Так же, как у хрома, электрон «убегает» с уже было достроенного s-коридора верхнего этажа в полузаполненный d-коридор предыдущего этажа у атомов меди (29), серебра (47), золота (79) и ещё восьми элементов 4–7-го рядов (найдите их!). А у палладия (46) и вовсе вниз «сбежали» оба электрона с верхнего этажа.

«Перебежки» электронов с уровней 4f на 5d и обратно в атомах лантаноидов и с уровней 5f на 6d и обратно в атомах актиноидов мы уже обсудили в задаче 3.

ПРОБИРКИ В ЦЕНТРИФУГЕ

а) Да, возможно: например, поставим три пробирки в вершины правильного треугольника, а оставшиеся четыре – в вершины квадрата.

б) Для всех N, кроме 1 и 23. Очевидно, что в первом случае центр тяжести будет смещён в сторону пробирки, а в последнем – в сторону, противоположную пустому отверстию.

Докажем, что для оставшихся значений N такая расстановка существует. Если N чётно и равно $2k$, то просто разобьём пробирки на k пар и поставим каждую пару в противоположные отверстия. Если N нечётно, то выберем из них три и поставим в вершины правильного треугольника, а оставшиеся пробирки (их чётное число) расставим парами друг напротив друга, как в предыдущем случае. Так мы сможем заполнить всю центрифугу, кроме трёх мест напротив пробирок, образующих треугольник.

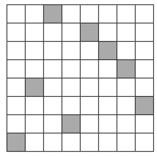
КВАКАЮЩИЕ СЛОВА

Деревянную посуду, тесто с закваской и увальня можно назвать *квашнёй*. Слова, связанные с четвертью: *кварта*, *квадрант*, *квартал* и др. *Буква* связана с деревом *бук* (возможно, потому, что древние письмена вырезали на дереве).

СЕРОВ, ПАВЕЛ I, Д'АКОСТА

Выдумана история про Серова. Он должен был написать слово «осёл» с твёрдым знаком на конце. По правилам дореволюционной орфографии, если слово кончалось на согласную, после неё должен был стоять твёрдый знак «Ъ» (раньше он назывался «ер»). Сто лет назад вследствие реформы 1917–1918 гг. это правило было отменено. А ещё в гимназиях не учили букве «ё».

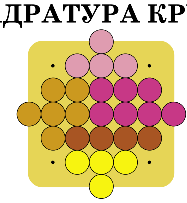
ЗАЯЧЬЕ ЗАНЯТИЕ



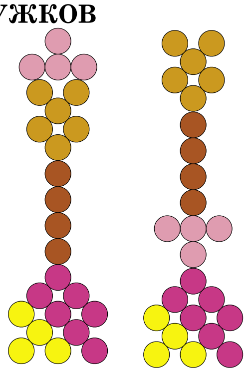
Гипотеза всё же *неверна* – есть такое расположение не бьющих друг друга восьми ладей, что среди попарных расстояний между ними нет трёх одинаковых (см. рисунок).

Но чисто по-человечески автор гипотезы *почти прав*. Ведь среди 40320 возможных расположений на доске восьми не бьющих друг друга ладей лишь у 36 нет трёх равных попарных расстояний (проверено на компьютере). Это менее 0,1% от общего количества. Найти такое расположение наугад, «методом тыка», почти нереально.

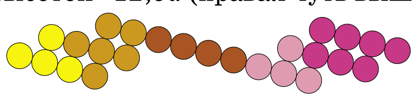
КВАДРАТУРА КРУЖКОВ



Квадрат



Башни высотой ~12,9d (правая чуть выше левой)



Фигура диаметром ~15,6d

НАШ КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач IV тура, с которыми справитесь, не позднее 1 января в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: v.ht/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

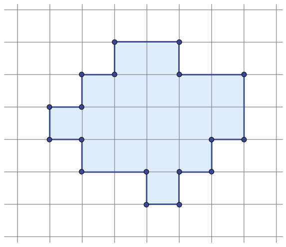
IV ТУР

16. У Андрея в ящике вперемешку лежат носки: целые – их 60%, и с дырками – их 40%. Когда Андрей достал 4 носка, процент оставшихся носков с дырками в ящике возрос до 50%. Сколько носков в ящике могло быть первоначально? Найдите все ответы и докажите, что других нет.

17. Можно ли рассадить за круглым столом через равные промежутки между людьми 20 молчунов и несколько болтунов так, чтобы напротив каждого молчуна сидел болтун и чтобы никакие два болтуна не сидели рядом?

Авторы: Ольга Зайцева-Иврии (16), Александр Ковальджи (17), Юрий Маркелов (18), Игорь Акулич (19) , Егор Бакаев (20)

18. Разделите фигуру на рисунке на две равные части двумя разными способами.

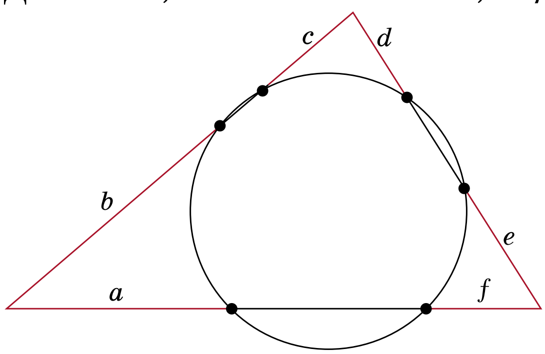


19. Можно ли представить в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных нечётных натуральных чисел: а) 2017; б) 2018; в) 2019?

20. Окружность пересекает стороны треугольника в шести точках (см. рисунок).

а) Докажите, что если $a=b$ и $c=d$, то $e=f$.

б) Докажите, что если $b=c$ и $d=e$, то $f=a$.



Художник Николай Крутиков

ПИРАТЫ И ПРОПАВШАЯ ЛОДКА

Материал подготовил А. Ковальджи
Художник Николай Воронцов

На необитаемом острове пираты нашли записку с указанием, где спрятан клад. В ней говорится: «От перевёрнутой лодки идите до пальмы, поверните направо и пройдите столько же, отметьте там точку. Затем вернитесь к лодке, идите к скале, поверните налево и пройдите столько же, отметьте там вторую точку. Посредине между вашими отметками зарыт клад». Пираты нашли и пальму, и скалу, но лодки уже не было. Как им теперь найти клад?

ISSN 2227-7986 18012